

Rappels sur les équations différentielles

Cette fiche a pour but de vous rappeler quelques éléments importants sur la résolution d'équations différentielles (*youpi !*). Elle se veut synthétique, mais pas forcément très rigoureuse et encore moins exhaustive. Si jamais les questions de continuité ou de divisions par zéro perturbent votre sommeil, une liste de ressources bibliographiques est disponible. Bonne lecture (*et bon dodo*).

1. Généralités

Notre but est de résoudre :

- des **équations différentielles linéaires d'ordre 1**
- des **équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants**.

Cela fait beaucoup de termes compliqués, décortiquons étape par étape :

Définition 1.1 (Équation différentielle d'ordre n): équation dont l'inconnue est une fonction $y(x)$, et qui fait intervenir y et ses dérivées successives jusqu'à la dérivée n -ième, $y^{(n)}$.

Définition 1.2 (Résoudre une équation différentielle): C'est trouver **toutes** les fonctions y qui vérifient (E).

Définition 1.3 (Équation différentielle linéaire): Équation différentielle pouvant se mettre sous la forme :

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (1)$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ des fonctions.

Définition 1.4 (Équation différentielle linéaire à coefficients constants): Équation différentielle pouvant se mettre sous la forme :

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = f(x) \quad (2)$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ des constantes.

Remarque 1.1 (Forme réduite): Si $a_n(x)$ n'est pas trop méchante et qu'elle ne s'annule pas, on peut diviser notre équation différentielle par $a_n(x)$. Nous obtenons alors des équations différentielles sous *forme réduite* ou *normalisées* :

$$\begin{aligned} a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) &\Leftrightarrow y^{(n)} + \dots + \frac{a_1(x)}{a_n(x)}y' + \frac{a_0(x)}{a_n(x)}y = \frac{f(x)}{a_n(x)} \\ &\Leftrightarrow y^{(n)} + \dots + \tilde{a}_1(x)y' + \tilde{a}_0(x)y = \tilde{f}(x) \end{aligned} \quad (3)$$

(Cette écriture de l'équation – qui reste strictement identique – permet d'exprimer les solutions de façon un peu plus simple. Dans la suite de cette fiche, c'est cette écriture qui sera utilisée. Lorsque nous mettrons des problèmes en équation, il ne faudra alors pas oublier de se ramener à cette forme en divisant par $a_n(x)$.)

Super, vous avez maintenant une idée plus précise des équations qui vont nous intéresser :

- des **équations différentielles linéaires d'ordre 1** :

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (4)$$

- des **équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants** :

$$y'' + ay' + by = f(x) \quad (5)$$

– “Ça commence à devenir un peu long ton intro là...?”

On arrive aux choses intéressantes (*enfin, je crois*). Il se trouve que nous avons un super théorème qui nous dit comment s'y prendre pour résoudre ce genre d'équations :

Théorème 1.1 (Ensemble des solutions): Soit (E) une équation différentielle linéaire et (E_H) son équation homogène associée. Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \quad (6)$$

où y_h est solution de l'équation homogène (E_H) et y_p est une solution particulière de (E)

Autrement dit, pour trouver **toutes** les solutions possibles d'une équation différentielle linéaire, il suffit de trouver **l'ensemble des solutions** de son équation homogène associée, puis de trouver **une** solution particulière.

Ainsi dans les deux prochaines parties (une sur les équations du premier ordre, une autre sur celles d'ordre 2), nous verrons comment trouver les solutions de l'équation homogène, puis comment trouver une solution particulière.

2. Éq. diff. linéaires du 1er ordre : $y' + a(x)y = f(x)$

Nous n'en rencontrerons pas dans ce module, mais un petit rappel ne fait pas de mal.

2.1. Équation homogène : $y' + a(x)y = 0$

Théorème 2.1.1 (Solutions de l'équation homogène): Soit a une fonction à valeurs réelles. On considère l'équation différentielle homogène (E_H) :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (7)$$

Les solutions de E_H sont de la forme :

$$y_h(x) = ke^{-A(x)} \quad (8)$$

où k est une constante quelconque et A une primitive de a .

2.2. Équation avec second membre : $y' + a(x)y = f(x)$

Théorème 2.2.1 (Solution particulière): Une solution particulière de (E) est donnée par :

$$y_p(x) = \left(\int f(x)e^{A(x)} dx \right) e^{-A(x)} \quad (9)$$

Théorème 2.2.2 (Ensemble des solutions): On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (10)$$

Les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = ke^{-A(x)} + \left(\int f(x)e^{A(x)} dx \right) e^{-A(x)} \quad \text{où } k \in \mathbb{R} \quad (11)$$

2.3. Des solutions ?

Nous voyons donc que notre équation différentielle admet une infinité de solutions (on peut prendre n'importe quelle valeur de k dans la formule). Cependant, si nous obligeons notre solution à passer par un point, alors il n'y a plus qu'une seule valeur de k possible. En physique, nous aurons souvent une condition initiale (par exemple $y(0) = 0$). Cela nous donnera alors **la** solution qui modélise notre phénomène physique.

3. Éq. diff. linéaires du 2nd ordre à coefficients constants : $y'' + ay' + by = f(x)$

3.1. Équation homogène : $y'' + ay' + by = 0$

Cherchons une solution sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer.

$$\begin{aligned}y'' + ay' + by &= 0 \\ \Leftrightarrow (r^2 + ar + b)e^{rx} &= 0 \\ \Leftrightarrow r^2 + ar + b &= 0\end{aligned}\tag{12}$$

Définition 3.1.1 (Équation caractéristique): L'équation $r^2 + ar + b = 0$ est appelée équation caractéristique de (E_H)

Théorème 3.1.1 (Solution de l'équation homogène):

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , les solutions de (E_H) sont de la forme :

$$y_{h(x)} = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\tag{13}$$

1. Si l'équation caractéristique possède une racine double r_0 , les solutions de (E_H) sont de la forme :

$$y_{h(x)} = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\tag{14}$$

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, les solutions de (E_H) sont de la forme :

$$y_{h(x)} = e^{\alpha x}(\lambda \cos \beta x + \mu \sin \beta x) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\tag{15}$$

3.2. Équation avec second membre : $y'' + ay' + by = f(x)$

Il existe des règles plus ou moins compliquées en fonction de la tête de $f(x)$, et aussi des méthodes plus générales. Cependant, dans notre cas, tester une solution particulière du même "type" que $f(x)$ s'avèrera souvent fructueux.

3.3. Des solutions ?

De la même façon que pour les équations du premier ordre, nous avons ici une infinité de solutions puisque dans chacun des trois cas nous pouvons choisir librement les valeurs de λ et μ . Pour "fixer" la solution, il nous faut alors deux conditions. En physique, nous aurons souvent deux conditions initiales : $y(0) = \dots$ et $y'(0) = \dots$. Ces conditions nous donneront **la** solution qui modélise notre système.