Du discret au continu

1. Exercice 1 : deux oscillateurs

Intéressons-nous aux deux oscillateurs couplés suivants :

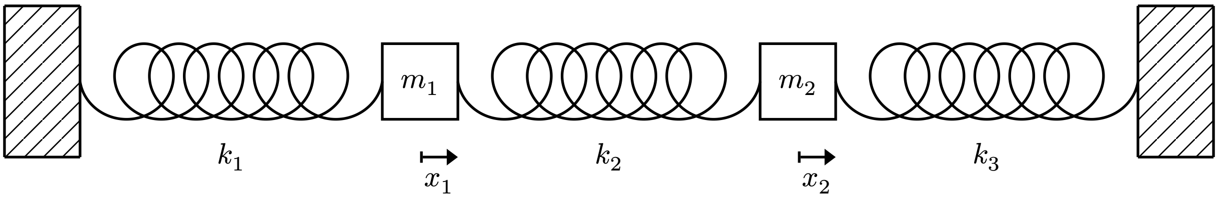

Figure 1: Un système à deux oscillateurs.

Nous avons deux masses, m_1 et m_2, reliées entre elles par un ressort de raideur k_2. Ces deux masses sont chacune reliées à un bâti par un ressort, de raideurs respectives k_1 et k_3. On définit la position des deux masses par x_1 et x_2, et on fera l'hypothèse que tous les ressorts sont au repos lorsque $x_1 = x_2 = 0$.

1. À l'aide du PFD ou des équations de Lagrange, montrez que les masses m_1 et m_2 suivent les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2) x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3) x_2 \end{cases}$$

2. Montrez que ce système d'équations peut se mettre sous la forme :

$$\boldsymbol{M} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\boldsymbol{K} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

où l'on explicitera les matrices $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{K}$.

Note : On définit ici $\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ comme étant la dérivée seconde temporelle de chaque composante. En d'autres termes :

$$\frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} x_1 \\ \frac{d^2}{dt^2} x_2 \end{pmatrix}$$

3. Supposons qu'il existe des solutions sous la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

où a_1 et a_2 sont des constantes complexes (ce qui permet d'inclure un déphasage initial). Montrer alors que :

$$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$$

À partir de maintenant, on considère que $m_1 = m_2 = m$ et que $k_1 = k_2 = k_3 = k$.

4. Si la matrice $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})$ était inversible, alors les seules valeurs de a_1 et a_2 qui permettraient de vérifier l'équation précédente seraient $a_1 = a_2 = 0$.

   Autrement dit, pour trouver des solutions un peu intéressantes, il faut que $(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M})$ ne soit pas inversible. En d'autres termes, que son déterminant soit nul :

   $$(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}) = 0$$

   Calculez ce déterminant, et trouvez les deux valeurs de ω (que l'on notera ω_1 et ω_2) qui permettent de l'annuler.

5. Revenons à nos moutons. Nous voulions voir s'il existait des solutions de la forme :

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t}$$

   Vous avez vu que pour trouver des solutions non-nulles de ce type, il fallait que ω prenne des valeurs particulières : ω_1 et ω_2.

   En essayant avec des fonctions de la forme :

   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega_1 t}$$

   Trouvez une relation entre a_1 et a_2 qui permette de résoudre l'équation différentielle. Faites de même avec les fonctions en ω_2.

6. Admettons que toutes les solutions de l'équation différentielle réelle s'écrivent comme la somme des parties réelles des deux formes de fonctions trouvées à la question précédente. Écrivez alors la forme des solutions. Les deux masses ont un mouvement qui est donné par la superposition de deux mouvements simples : expliquez-les.

2. Exercice 2 : n oscillateurs

Voyons maintenant ce qu'il se passe lorsque nous couplons n oscillateurs :

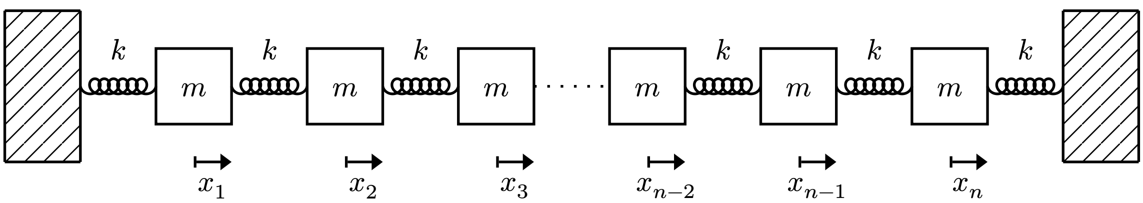

Figure 2: Une chaîne de n oscillateurs couplés.

Simplifions directement le problème en étudiant le cas où toutes les masses et toutes les raideurs sont identiques. La position de la i-ème masse est donnée par x_i. Comme précédemment, nous faisons l'hypothèse que les ressorts sont au repos lorsque $x_1 = x_2 = ...x_n = 0$.

1. En isolant la i-ème masse et en faisant le bilan des forces exercées par les ressorts de gauche et de droite, montrez que l'équation du mouvement s'écrit :

   $$m\frac{d^2 x_i}{dt^2} = k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1})$$

2. Supposons que l'espacement h entre les masses soit très petit. On peut alors remplacer les n positions $x_i(t)$ par une fonction continue $u(x,t)$ telle que $x_i(t) = u(x_i, t)$.

   En effectuant un développement de Taylor de la fonction u par rapport à la variable d'espace x autour de la position x_i, donnez l'expression de $x_{i+1}(t) = u(x_i + h, t)$ et de $x_{i-1}(t) = u(x_i - h, t)$ à l'ordre 2 en h.

3. En additionnant ces deux développements, en déduire la relation suivante :

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \approx h^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

4. Réinjecter ce résultat dans l'équation obtenue à la question 1.

5. On définit la masse linéique $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{m}{h}$ et le module d'Young $E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k}{h}$

   En divisant votre équation par h, montrer que l'on obtient l'équation de propagation des ondes de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

   où l'on explicitera la célérité c de l'onde en fonction de E et ρ.