

Ondes mécaniques

Table des matières

1. Systèmes discrets	3
1.1. Mise en équation	3
1.1.1. Principe Fondamental de la Dynamique	3
1.1.2. Lagrangien	3
1.2. Oscillations libres	4
1.2.1. Oscillations libres non-amorties	4
1.2.2. Oscillations libres amorties	4
1.3. Oscillations forcées	5
1.3.1. Excitation harmonique	5
2. Systèmes continus	7
2.1. Vibrations longitudinales	7
2.1.1. Mise en équation	7
2.1.2. Solutions à l'équation de d'Alembert	7
2.1.3. Conditions aux limites	8
2.1.4. Oscillations libres	9
2.1.5. Oscillations forcées	10
2.2. Vibrations transversales	11
2.2.1. Mise en équation	11
2.2.2. Solutions à variables séparées : cas libre	12
2.2.3. Conditions aux limites	13
2.2.4. Oscillations libres	14
2.2.5. Oscillations forcées	15

1. Systèmes discrets

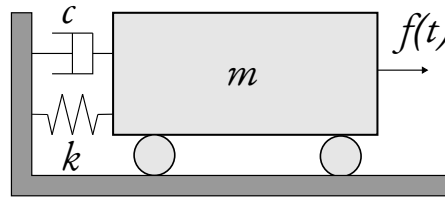


Figure 1: Un oscillateur simple.

1.1. Mise en équation

1.1.1. Principe Fondamental de la Dynamique

Considérons un chariot de masse m (que l'on assimile à un point) pouvant se déplacer horizontalement. Il est attaché à un ressort de raideur k , est retenu par un amortisseur d'amortissement c , et est soumis à une force extérieure $f(t)$. En appliquant la seconde loi de Newton, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_k + F_c + f(t) \\ &= -kx - c\dot{x} + f(t), \end{aligned} \quad (1)$$

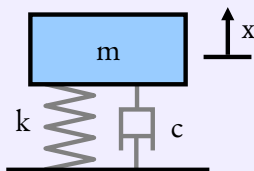
c'est-à-dire

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2)$$

où l'on introduit la constante ω_0 , nommée *pulsation propre* et définie par

$$\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3)$$

Exercice :



1. Faites le bilan des forces appliquées à la masse m .
2. En appliquant le Principe Fondamental de la Statique, trouvez l'expression de la position d'équilibre y_s .
3. Appliquez maintenant le Principe Fondamental de la Dynamique et donnez l'équation différentielle régissant ce système.
4. Il est possible de simplifier cette équation en notant $\tilde{x}$ la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre : $\tilde{x} \stackrel{\text{def}}{=} x - x_s$. Quelle équation différentielle suit alors $\tilde{x}$?

1.1.2. Lagrangien

Une autre façon de retrouver Eq. 2 consiste à utiliser le Lagrangien :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c - E_p}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_c - E_p}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial P_e}{\partial \dot{q}} \quad (4)$$

Exercice : Retrouvez l'équation différentielle régissant le système précédent à l'aide du Lagrangien.

1.2. Oscillations libres

Nous nous plaçons ici dans le cas où le système n'est pas forcé, c'est-à-dire lorsque $f(t) = 0$. L'équation devient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (5)$$

1.2.1. Oscillations libres non-amorties

Simplifions encore le problème, et regardons ce qu'il se passe si on ignore l'amortissement ($c = 0$). L'équation devient :

$$\ddot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (6)$$

Les solutions de Eq. 6 peuvent s'écrire sous plusieurs formes, toutes équivalentes :

$$\begin{aligned} x(t) &= Ce^{i\omega_0 t} + C^*e^{-i\omega_0 t} \\ &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \\ &= X \sin(\omega_0 t + \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

où les constantes C , (A, B) et (X, φ) sont déterminées en fonction des conditions initiales.

Exercice : Montrer que ces notations sont équivalentes.

Ces solutions modélisent des oscillations de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$, où f_0 est appelée *fréquence propre*.

1.2.2. Oscillations libres amorties

Ajoutons maintenant l'amortisseur ($c \neq 0$). L'équation devient :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = 0, \quad (8)$$

où la constante ξ est appelée *coefficient d'amortissement normalisé* et est donné par :

$$\xi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (9)$$

Trois formes de solutions existent selon la valeur du coefficient d'amortissement ξ .

1.2.2.1. Amortissement élevé : $\xi > 1$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = Ae^{(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t} + Be^{(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_0 t}. \quad (10)$$

C'est la somme de deux exponentielles réelles qui décroissent rapidement en fonction du temps. Le mouvement s'arrête rapidement, sans oscillations.

1.2.2.2. Amortissement critique : $\xi = 1$

Les solutions sont de la forme :

$$x(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t}. \quad (11)$$

1.2.2.3. Amortissement faible : $\xi < 1$

Les solutions sont de la forme :

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\xi\omega_0 t} (Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t}) \\ &= Xe^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \end{aligned} \quad (12)$$

où ω_1 est appelée *pseudo-pulsation* et est définie par $\omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$.

1.3. Oscillations forcées

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f(t), \quad (13)$$

1.3.1. Excitation harmonique

Considérons le cas où f est sinusoïdale :

$$f(t) = f_0 \cos(\omega t), \quad (14)$$

où f_0 est l'amplitude de la force d'excitation et ω sa pulsation.

L'Eq. 13 devient alors :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = f_0 \cos(\omega t). \quad (15)$$

Une façon de résoudre cette équation consiste à imaginer une seconde équation, analogue à Eq. 15, mais avec un sinus comme force d'excitation :

$$\ddot{y} + 2\xi\omega_0\dot{y} + \omega_0^2y = f_0 \sin(\omega t). \quad (16)$$

L'astuce réside dans le fait de définir $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} x(t) + iy(t)$, fonction complexe, et d'étudier plutôt l'équation différentielle complexe sur z :

$$\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2z = f_0 e^{i\omega t}. \quad (17)$$

Étant données les propriétés de dérivation des exponentielles, il est plus facile de trouver une solution particulière à cette nouvelle équation différentielle avec un second membre en "exponentielle". Après avoir trouvé les solutions $z(t)$, il suffit de prendre sa partie réelle pour trouver $x(t)$.

Pour trouver une solution particulière de Eq. 17, nous pouvons tester n'importe quelle fonction. En particulier, l'expérience nous apprend qu'en régime forcé un oscillateur oscille à la même fréquence que l'excitation. Il paraît alors assez logique de tester une fonction de la forme :

$$z(t) = C e^{i\omega t}, \quad (18)$$

où C est pour l'instant une constante indéterminée.

En substituant cette fonction dans Eq. 17, nous obtenons :

$$(\omega^2 + i2\xi\omega_0\omega + \omega_0^2)C e^{i\omega t} = f_0 e^{i\omega t}. \quad (19)$$

Notre fonction "test" est donc solution de Eq. 17 si et seulement si :

$$C = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i2\xi\omega} \quad (20)$$

Ainsi nous avons trouvé une solution particulière de Eq. 17, de la forme :

$$z(t) = C e^{i\omega t}. \quad (21)$$

Cependant, C est un nombre complexe. Avant de prendre la partie réelle de $z(t)$ (ce qui est notre but, rappelons-le), il est utile de ré-écrire $z(t)$ sous la forme $A e^{i\theta}$, avec $A, \theta \in \mathbb{R}$. Nous avons d'une part :

$$A^2 \stackrel{\text{def}}{=} |C|^2 = C C^* = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega^2} \quad (22)$$

D'autre part :

$$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \angle C = -\arctan\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (23)$$

Finalement, $z(t)$ s'écrit sous forme exponentielle :

$$z(t) = Ce^{i\omega t} = Ae^{i\theta}e^{i\omega t} = \rho e^{i(\omega t + \theta)}. \quad (24)$$

Il est temps maintenant de prendre la partie réelle de $z(t)$, afin de trouver ce qui nous intéresse dans cette section : une solution particulière de Eq. 15.

$$x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Re(z(t)) = A \cos(\omega t + \theta). \quad (25)$$

La solution générale de Eq. 15 est obtenue en lui ajoutant la solution générale de l'équation homogène, c'est-à-dire aux solutions trouvées dans Section 1.2.2 :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta) + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (26)$$

où C_1 et C_2 dépendent des conditions initiales.

Comme $C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$ tend vers 0 de façon exponentielle, le comportement à long terme du système est donné par le terme issu du forçage : $A \cos(\omega t + \theta)$. On parle de régime *transitoire* et de régime *permanent* :

$$x(t) = \underbrace{A \cos(\omega t + \theta)}_{\text{régime permanent}} + \underbrace{C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}}_{\text{régime transitoire}}, \quad (27)$$

2. Systèmes continus

2.1. Vibrations longitudinales

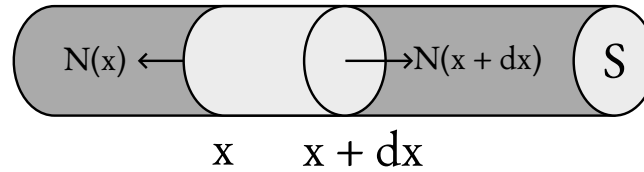


Figure 2: Une barre subissant des vibrations longitudinales.

2.1.1. Mise en équation

La masse de cette petite section est $dm = \rho S dx$.

Le PFD appliqué à ce petit tronçon s'écrit :

$$\begin{aligned} dm \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial N}{\partial x} dx \\ \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial N}{\partial x}. \end{aligned} \quad (28)$$

Or, pour un matériau élastique homogène et isotrope, la mécanique des milieux continus nous dit que :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (29)$$

En combinant ces deux équations, on tombe sur :

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}. \quad (30)$$

Nous retrouvons alors l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad (31)$$

où

$$c_L \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (32)$$

est la vitesse des ondes longitudinales.

2.1.2. Solutions à l'équation de d'Alembert

Le plan pour résoudre cette équation est très similaire au cas discret :

1. On cherche des solutions sous une certaine forme, que l'on pressent (*ou pas*) être bonne pour notre problème. Par exemple, dans le cas d'équations linéaires d'ordre 2, tester des fonctions harmoniques ou des exponentielles est souvent une bonne idée.
Peut-être existe-t-il d'autres solutions ? Nous verrons cela plus tard.
2. On applique toutes les contraintes que notre système doit respecter (conditions initiales, conditions aux limites...) et l'on espère avoir encore une solution qui fonctionne à la fin.
3. On utilise un théorème mathématique pour prouver que la solution que l'on a trouvée est la seule possible, ce qui permet de répondre à l'interrogation que nous avons au point 1.

Ici, rien ne nous empêche de chercher des solutions du type :

$$u(x, t) = X(x)\Phi(t). \quad (33)$$

En injectant dans l'équation de d'Alembert, on tombe sur l'équation suivante :

$$\frac{c_L^2}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\Phi(t)} \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2}. \quad (34)$$

Or, le terme de gauche ne dépend que de la position x tandis que le terme de droite ne dépend que du temps t . Autrement dit, le membre de gauche est indépendant du temps et le membre de droite est indépendant de la position. Les deux membres étant égaux, ils doivent être tous deux indépendants à la fois de la position **et** du temps. La position et le temps étant nos deux seules variables, ces termes doivent donc être égaux à une constante (*prenez le temps de bien comprendre l'argument*).

On peut donc écrire :

$$\frac{c_L^2}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\Phi(t)} \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} = \text{cte} . \quad (35)$$

Nous avons à priori le droit de chercher des solutions quelle que soit la valeur de cette constante. Cependant, si cette constante est positive nous obtenons des solutions exponentiellement croissantes (*je vous laisse le soin de le vérifier*). Ceci ne permettrait pas de satisfaire les conditions aux limites de notre système (*plus de détails dans la prochaine section*). Je vous propose donc de nous intéresser uniquement au cas où cette constante est négative, et de la noter $-\omega^2$ (*cette notation s'avèrera pratique par la suite*) :

$$\frac{c_L^2}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\Phi(t)} \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} = -\omega^2. \quad (36)$$

On se retrouve alors avec deux équations différentielles :

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{c_L^2} X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \Phi(t) = 0 \quad (37)$$

que l'on sait maintenant bien résoudre :

$$\begin{cases} \Phi(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \\ X(x) = C \cos(kx) + D \sin(kx), \quad k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\omega}{c_L} \end{cases} \quad (38)$$

Au final, on a trouvé des solutions du type $u(x, t) = X(x)\Phi(t)$ d'expression :

$$u(x, t) = X(x)\Phi(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)][C \cos(kx) + D \sin(kx)]. \quad (39)$$

où les constantes A, B, C, D et ω restent à déterminer en fonction des conditions initiales et des conditions aux limites.

2.1.3. Conditions aux limites

Pour l'instant nous avons trouvé des solutions à l'équation de d'Alembert, mais n'avons pas pris en compte de conditions aux limites : nos solutions fonctionnent donc pour des barres infinies. Voyons ce qu'il se passe quand on impose des conditions aux limites, c'est-à-dire en $x = 0$ et $x = L$.

Pour chacun de ces deux bords, il peut y avoir deux types de conditions :

1. un bord rigide ou encasté : le déplacement u y est nul.
2. un bord libre : dans ce cas la contrainte y est nulle, ce qui revient à dire que $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ en ce bord.

À titre d'exemple, nous allons étudier le cas où les deux bords sont encastres. Nos deux conditions s'écrivent alors :

$$u(x = 0, t) = 0 \quad \text{et} \quad u(x = L, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (40)$$

En prenant en compte ces conditions dans l'expression de nos solutions (Eq. 39), il vient que :

$$C = 0 \quad \text{et} \quad \sin(kL) = 0. \quad (41)$$

Respecter la première condition implique la disparition du terme " $C \cos(kx)$ " dans Eq. 39. La deuxième condition implique que k prenne des valeurs particulières :

$$k_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m \in \mathbb{N}^*. \quad (42)$$

(Nous ne gardons pas le cas où k serait égal à 0, car cela nous donnerait une solution nulle, ce qui n'est pas très intéressant.)

Au final, seules certaines fonctions $X(x)$ trouvées précédemment permettent de respecter les conditions aux limites. Il s'agit des :

$$X_m = D_m \sin(k_m x). \quad (43)$$

Ce qui nous donne une famille de solutions possibles de la forme :

$$u_m(x, t) = X_m(x)\Phi_m(t) = D_m \sin(k_m x)[A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t)], \quad (44)$$

où k_m et ω_m ne peuvent prendre qu'un certain nombre de valeurs, et où les constantes D_m , A_m et B_m restent à déterminer en fonction des conditions initiales.

Enfin, j'affirme (*sans en donner la démonstration*) que les fonctions X_m sont orthogonales sur l'intervalle $[0, L]$, et qu'elles peuvent même être normalisées **sans perte de généralité** afin d'obtenir une famille orthonormale. Ceci se traduit par la relation suivante :

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x) dx = \delta_{m,n}. \quad (45)$$

Cela permet de "fixer" la valeur de D_m , qui vaut alors (*vous pouvez le vérifier*) : $D_m = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

2.1.4. Oscillations libres

Nous avons trouvé jusqu'à présent une famille de solutions vérifiant l'équation de d'Alembert et les conditions aux limites (dans le cas encasté - encasté). Considérons maintenant une combinaison linéaire de ces solutions :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} X_m(x)\Phi_m(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(k_m x)[A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t)] \quad (46)$$

Comme l'équation de d'Alembert est linéaire, cette combinaison linéaire est aussi solution de cette équation. De plus, cette solution vérifie aussi les conditions aux limites.

Exercice : Montrer que cette fonction respecte les conditions aux limites.

Nous allons maintenant voir pourquoi l'Eq. 46 permet de décrire n'importe quel mouvement possible dans notre barre.

Il nous reste une dernière contrainte à prendre en compte : les conditions initiales. Supposons que nous ayons une fonction $u_0(x)$ donnant la position initiale de n'importe quel point de notre barre, et une fonction $\dot{u}_0(x)$ donnant la vitesse initiale de n'importe quel point de notre barre. On a :

$$\begin{cases} u_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m X_m(x) \\ \dot{u}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{u}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m B_m X_m(x) \end{cases} \quad (47)$$

En multipliant ces deux équations par $X_m(x)$, en intégrant de 0 à L puis en tenant compte de la relation d'orthogonalité, il vient :

$$A_m = \int_0^L u_0(x) X_m(x) dx \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{\omega_m} \int_0^L \dot{u}_0(x) X_m(x) dx. \quad (48)$$

En conclusion, nous avons trouvé une solution de l'équation de d'Alembert respectant les conditions aux limites et les conditions initiales.

2.1.5. Oscillations forcées

Imaginons maintenant que notre système est soumis à une force extérieure $f(x, t)$ (il s'agit en réalité d'une force par unité de masse pour que les dimensions marchent bien) :

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c_L^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (49)$$

Voyons s'il existe une solution de la forme :

$$u(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} X_m(x) \Phi_m(t). \quad (50)$$

En injectant dans notre équation différentielle, nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} X_m(x) \frac{\partial^2 \Phi_m(t)}{\partial t^2} - c_L^2 \Phi_m(t) \frac{\partial^2 X_m(x)}{\partial x^2} = f(x, t) \quad (51)$$

ou encore :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 \Phi_m(t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 \Phi_m(t) \right] X_m(x) = f(x, t) \quad (52)$$

En multipliant cette équation par $X_n(x)$ et en intégrant de 0 à L , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \Phi_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \Phi_n(t) = \int_0^L f(x, t) X_n(x) dx \quad (53)$$

Il ne reste "plus qu'à" résoudre cette équation différentielle. Nous savons déjà que les solutions de cette équation s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation homogène (correspondant au régime libre, ou régime transitoire en présence d'amortissement) et d'une solution particulière (correspondant au régime stationnaire). Afin de ne pas surcharger les calculs, et comme nous nous intéressons surtout au régime stationnaire, nous nous contenterons la plupart du temps de trouver une solution particulière.

En guise d'exemple, et afin de voir une résolution complète, supposons que f est une fonction sinusoïdale, dépendant uniquement du temps :

$$f(x, t) = f_0 \sin(\Omega t) \quad (54)$$

En cherchant une solution particulière de la forme :

$$\Phi_n(t) = A_n \sin(\Omega t) \quad (55)$$

Nous trouvons la relation suivante :

$$A_n = \frac{f_0 \int_0^L X_n(x) dx}{w_n^2 - \Omega^2} \quad (56)$$

Le déplacement s'écrit alors (en régime stationnaire) :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \Phi_n(t) = f_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^L X_n(x) dx}{w_n^2 - \Omega^2} X_n(x) \sin(\Omega t) \quad (57)$$

2.2. Vibrations transversales

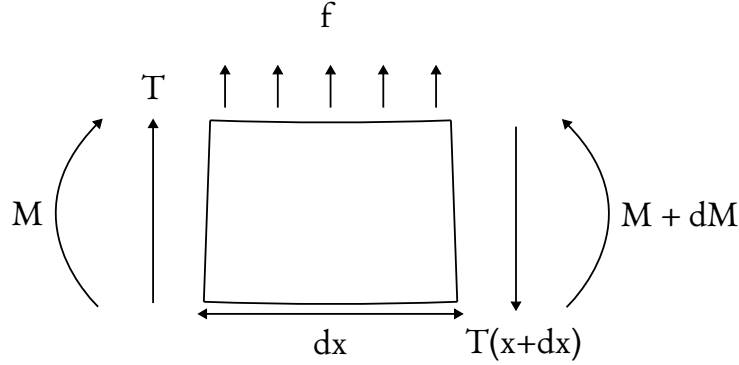


Figure 3: Une barre subissant des vibrations transverses.

2.2.1. Mise en équation

La masse de cette petite section est $dm = \rho S dx$. On applique le PFD à ce petit tronçon :

$$\begin{aligned} \rho S dx \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} &= T(x, t) - T(x + dx, t) + dx f(x, t) \\ &= dx f(x, t) - dx \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \\ \rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} &= f(x, t) - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (58)$$

Par l'équilibre des moments (*je n'en dis pas plus : ceci est une hypothèse du modèle*) en $x + dx$ on a :

$$\begin{aligned} M(x + dx, t) - M(x, t) - dx T(x, t) &= 0 \\ dx \frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - dx T(x, t) &= 0 \\ T(x, t) &= \frac{\partial M(x, t)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (59)$$

En injectant dans Eq. 58, on trouve :

$$\rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) - \frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2}. \quad (60)$$

On peut démontrer le fait que :

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}. \quad (61)$$

On trouve alors :

$$\rho S \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = f(x, t) - EI \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4}, \quad (62)$$

soit en ré-arrangeant :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + c_T^2 \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) \quad (63)$$

où $f(x, t)$ est une densité linéique de force et où :

$$c_T \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad (64)$$

2.2.1.1. Moment

$$\sigma(y) = E \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \quad (65)$$

$$\partial u(x, y) = -(L \partial \theta - (L - y) \partial \theta) = -y \partial \theta \quad (66)$$

$$\theta \approx \tan(\theta) = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \quad (67)$$

Au final :

$$\sigma(y) = -E \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \cdot y \quad (68)$$

$$\begin{aligned} M(x, t) &= \int_y -\sigma(y) y \, dy \\ &= \int_y -E \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} y \, dy \\ &= E \int_y \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \cdot y^2 \, dy \\ &= E \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \int_y y^2 \, dy \\ &= EI \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (69)$$

2.2.2. Solutions à variables séparées : cas libre

Intéressons-nous premièrement au cas libre ($f(x, t) = 0$) :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + c_T^2 \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = 0 \quad (70)$$

Essayons de trouver des solutions sous la forme :

$$v(x, t) = X(x) \Phi(t) \quad (71)$$

En injectant dans l'équation, on tombe sur l'équation suivante :

$$\frac{c_T^2}{X(x)} \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{\Phi(t)} \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2}. \quad (72)$$

De la même façon que pour les ondes longitudinales, nous avons une égalité entre un membre dépendant uniquement de l'espace et un membre dépendant uniquement du temps. Cela implique donc qu'ils soient tous deux égaux à une constante par rapport à l'espace et au temps. Nous pourrions à priori trouver des solutions quelque soit la valeur de cette constante, mais je vous assure que seules des constantes positives nous donneront des solutions intéressantes (*si vous ne me croyez pas, essayez avec des constantes négatives*). Nous la notons donc ω^2 :

$$\frac{c_T^2}{X(x)} \frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} = -\frac{1}{\Phi(t)} \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} = \omega^2. \quad (73)$$

Ceci conduit aux deux équations différentielles :

$$\frac{\partial^4 X(x)}{\partial x^4} - \underbrace{\frac{\omega^2}{c_T^2}}_{\gamma^4} X(x) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \Phi(t)}{\partial t^2} + \omega^2 \Phi(t) = 0 \quad (74)$$

Nous connaissons bien la seconde équation. Ses solutions s'écrivent :

$$\Phi(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (75)$$

Pour l'équation différentielle sur $X(x)$ (*ne vous laissez pas effrayer par son ordre 4*), nous pouvons essayer de trouver des équations sous la forme $X(x) = \tilde{X}e^{rx}$. Nous trouvons alors les racines suivantes $r = \gamma, -\gamma, i\gamma, -i\gamma$. Une solution $X(x)$ peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire de ces 4 solutions :

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{-\gamma x} + C_3 e^{i\gamma x} + C_4 e^{-i\gamma x} \\ &= C \cos(\gamma x) + D \sin(\gamma x) + G \cosh(\gamma x) + H \sinh(\gamma x) \end{aligned} \quad (76)$$

Exercice : Montrer que ces deux écritures sont équivalentes.

Comme toujours avec les équations différentielles, une fois qu'on a trouvé une forme de solutions, on regarde si on en a trouvé assez pour pouvoir dire qu'on les a toutes trouvées. Ici nous avons une équation différentielle linéaire d'ordre 4, et les solutions trouvées sont une combinaison linéaire de quatre fonctions "indépendantes". Un théorème mathématique nous assure qu'on a trouvé toutes les solutions.

2.2.3. Conditions aux limites

- Bord encastré : le déplacement v et la rotation $\theta \approx \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$ sont nuls en ce point.
- Bord libre : l'effort tranchant $T \propto \frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^3}$ et le moment $M \propto \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ sont nuls en ce point.
- Appui simple : le déplacement v et le moment $M \propto \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ sont nuls en ce point.

À titre d'exemple, nous allons étudier le cas où les deux bords sont encastrés. Nos quatre conditions s'écrivent alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} v(x=0, t) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x=0, t) = 0 \\ v(x=L, t) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x=L, t) = 0 \end{array} \right. \quad (77)$$

En prenant en compte les conditions en $x = 0$ dans l'expression de nos solutions (Eq. 76), il vient que :

$$\begin{cases} C = -G \\ D = -H \end{cases} \quad (78)$$

Puis en prenant en compte les conditions en $x = L$:

$$\begin{cases} C[\cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L)] + D[\sin(\gamma L) - \sinh(\gamma L)] = 0 \\ -C[\sin(\gamma L) + \sinh(\gamma L)] + D[\cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L)] = 0 \end{cases} \quad (79)$$

Ce système d'équations s'écrit sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L) & \sin(\gamma L) - \sinh(\gamma L) \\ -\sin(\gamma L) - \sinh(\gamma L) & \cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (80)$$

Si le déterminant de ce système est non nul (ie. $\det(M) \neq 0$), alors la seule solution est la solution nulle où $C = D = 0$, ce qui n'est pas très intéressant. Regardons alors quelle condition doit respecter γ pour que le déterminant soit nul :

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0 \\ [\cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L)][\cos(\gamma L) - \cosh(\gamma L)] \\ + [\sin(\gamma L) + \sinh(\gamma L)][\sin(\gamma L) - \sinh(\gamma L)] &= 0 \\ \dots &= 0 \\ \cos(\gamma L) \cosh(\gamma L) &= 1 \end{aligned} \quad (81)$$

Cette équation n'admet pas de solutions analytiques : il nous faut les calculer numériquement. Dans la suite nous notons γ_m ces solutions.

Au final, seules certaines fonctions $X(x)$ trouvées précédemment permettent de respecter les conditions aux limites. Il s'agit des :

$$X_m(x) = C_m[\cos(\gamma_m x) - \cosh(\gamma_m x)] + D_m[\sin(\gamma_m x) - \sinh(\gamma_m x)]. \quad (82)$$

Ce qui nous donne une famille de solutions possibles de la forme :

$$\begin{aligned} u_{m(x,t)} &= X_m(x)\Phi_m(t) \\ &= \left[C_m[\cos(\gamma_m x) - \cosh(\gamma_m x)] + D_m[\sin(\gamma_m x) - \sinh(\gamma_m x)] \right] \\ &\quad \times \left[A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t) \right] \end{aligned} \quad (83)$$

où γ_m et ω_m ne peuvent prendre qu'un certain nombre de valeurs, et où les constantes C_m , D_m , A_m et B_m restent à déterminer en fonction des conditions initiales.

2.2.4. Oscillations libres

Nous avons trouvé jusqu'à présent une famille de solutions vérifiant l'équation et les conditions aux limites (dans le cas encasté - encasté). Considérons maintenant une combinaison linéaire de ces solutions :

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} X_{m(x)} \Phi_{m(t)} \quad (84)$$

Comme l'équation est linéaire, cette combinaison linéaire est aussi solution de Eq. 70. De plus, cette solution vérifie aussi les conditions aux limites.

Nous allons maintenant voir pourquoi cette combinaison linéaire permet de décrire n'importe quel mouvement possible dans notre barre.

Il nous reste une dernière contrainte à prendre en compte : les conditions initiales. Supposons que nous ayons une fonction $v_0(x)$ donnant la position initiale de n'importe quel point de notre barre, et une fonction $\dot{v}_0(x)$ donnant la vitesse initiale de n'importe quel point de notre barre. On a :

$$\begin{cases} v_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m X_m(x) \\ \dot{v}_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{v}(x, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_m B_m X_m(x) \end{cases} \quad (85)$$

En multipliant ces deux équations par $X_m(x)$, en intégrant de 0 à L puis en tenant compte de la relation d'orthogonalité, il vient :

$$A_m = \int_0^L v_0(x) X_m(x) dx \quad \text{et} \quad B_m = \frac{1}{\omega_m} \int_0^L \dot{v}_0(x) X_m(x) dx. \quad (86)$$

En conclusion, nous avons trouvé une solution de l'Eq. 70 respectant les conditions aux limites et les conditions initiales.

2.2.5. Oscillations forcées

Imaginons maintenant que notre système soit soumis à une force extérieure $f(x, t)$. Nous avons trouvé l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + c_T^2 \frac{\partial^4 v(x, t)}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) \quad (87)$$

Voyons s'il existe une solution de la forme :

$$v(x, t) = \sum_{m=1}^{+\infty} X_m(x) \Phi_m(t). \quad (88)$$

En injectant dans notre équation différentielle, nous obtenons :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} X_m(x) \frac{\partial^2 \Phi_m(t)}{\partial t^2} + c_T^2 \Phi_m(t) \frac{\partial^4 X_m(x)}{\partial x^4} = \frac{1}{\rho S} f(x, t) \quad (89)$$

ou encore :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \left[\frac{\partial^2 \Phi_m(t)}{\partial t^2} + \omega_m^2 \Phi_m(t) \right] X_m(x) = \frac{1}{\rho S} f(x, t). \quad (90)$$

En multipliant cette équation par $X_n(x)$ et en intégrant de 0 à L , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 \Phi_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \Phi_n(t) = \int_0^L \frac{1}{\rho S} f(x, t) X_n(x) dx. \quad (91)$$

Il ne reste "plus qu'à" résoudre cette équation différentielle. Nous savons déjà que les solutions de cette équation s'écrivent comme la somme des solutions de l'équation homogène (correspondant au régime libre, ou régime transitoire en présence d'amortissement) et d'une solution particulière (correspondant au régime stationnaire). Afin de ne pas surcharger les calculs, et comme nous nous intéressons surtout au régime stationnaire, nous nous contenterons la plupart du temps de trouver une solution particulière.

En guise d'exemple, et afin de voir une résolution complète, supposons que f est une fonction sinusoïdale appliquée au point x_0 :

$$f(x, t) = f_0 \delta(x - x_0) \sin(\Omega t) \quad (92)$$

En cherchant une solution particulière de la forme :

$$\Phi_n(t) = A_n \sin(\Omega t) \quad (93)$$

Nous trouvons la relation suivante :

$$A_n = \frac{\frac{f_0}{\rho S} \int_0^L \delta(x - x_0) X_n(x) dx}{w_n^2 - \Omega^2} = \frac{\frac{f_0}{\rho S} X_n(x_0)}{w_n^2 - \Omega^2} \quad (94)$$

Le déplacement s'écrit alors (en régime stationnaire) :

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \Phi_n(t) = \frac{f_0}{\rho S} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x_0)}{w_n^2 - \Omega^2} X_n(x) \sin(\Omega t) \quad (95)$$